Title	量子系の力学的エントロピーを基にした平均相互エントロピーの定式化に関する一考察 (情報科学としての函数解析とその周辺)
Author(s)	宮下, 真行; 渡邉, 昇
Citation	数理解析研究所講究録 (2003), 1340: 134-143
Issue Date	2003-09
URL	http://hdl.handle.net/2433/43460
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1340 巻 2003 年 134-143

量子系の力学的エントロピーを基にした平均相互エントロピーの定式化に関する一考察

東京理科大学 理工学研究科 情報科学専攻 宮下 真行(Masayuki Miyashita)
東京理科大学 理工学部 情報科学科 渡邉 昇(Noboru Watanabe)
Department of Information Sciences Faculty of Science and Technology
Tokyo University of Science

1 はじめに

量子系の力学的エントロピーは,1975 年ごろ Emch[6]と Connes-Stormer[5]によって最初に導入され,1987 年には Connes-Narnhoffer-Thirring[4]が C^*-系において CNT 力学的エントロピーを定義した.また,1994 年には,Alicki-Fannes[3]が単位の有限作用素分割を用いて AF 力学的エントロピーを定めた.1995 年には,Ohya[9]が,C^*-混合エントロピーをベースとして量子系に力学的エントロピーと平均相互エントロピーを定式化した.1997 年には,Accardi-Ohya-Watanabe[1]が,量子マルコフ連鎖を通して,AOW 力学的エントロピーを定義した.さらに最近,Kossakowski-Ohya-Watanabe[7]は,AOW と AF を含むより一般的な系に対して完全正写像に関する KOW 力学的エントロピーを定式化した.これらの力学的エントロピーの関係は,いくつかの文献[2,10]でなされている.

Ohya によって導入された量子相互エントロピーについて簡単に説明する.そして,量子相互エントロピーを基にした平均相互エントロピーを導入して満たすべき条件を証明し,モデルとして,コヒーレント入力状態と減衰チャネルを入出力系の時間発展及び入出力間の量子チャネルとして考えたときの平均相互エントロピーを求める.

2 量子系における相互エントロピー

2.1 量子相互エントロピー

量子系の状態が密度作用素 $\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ で与えられている場合, そのエントロピーは, フォン・ノイマンによって, 状態の持つ不確定さ, 曖昧さを表す尺度として,

$$S(\rho)=-tr\,\rho\log\rho$$

で与えられる. また, 可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の場合は, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ のスペクトル分解は離散的であり, ρ の固有値 λ_n と λ_n に関する固有空間への $\mathcal{H}$ からの射影作用素 P_n に対して, 一意に

$$\rho=\sum_n\lambda_n P_n$$

と書ける. P_n の次元を $\dim P_n$ と書くと, 各 λ_n に縮退がなければ, P_n の値域の次元は 1 であり, また縮退している場合, この P_n は一次元射影作用素 $E_j^{(n)}$ を用いて,

$$P_n=\sum_{j=1}^{\dim P_n}E_j^{(n)}$$

と分解される. ここで, $E_j^{(n)}$ は ρ の λ_n に関する固有ベクトル $x_j^{(n)}$ $(j=1,\cdots,\dim P_n)$ に

$$E_j^{(n)} = \left| x_j^{(n)} \right\rangle \left\langle x_j^{(n)} \right|$$

あり，この添え字 j, n を適当に付け替えて，

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \cdots,$$
$$E_n \perp E_m (n \neq m)$$
$$\rho = \sum_n \lambda_n E_n$$

のように書き直したものをシャッテン分解（フォン・ノイマン-シャッテン分解）という．ここで，Ohya によって定式化された相互エントロピーについて論ずる．次に，量子系の相互エントロピーとは，量子系の通信において情報が入力側から出力側にどれだけ正確に伝達されたかを表す量であり，量子系の情報伝達の効率をあらわすチャネルの伝送容量を考える上で必要不可欠である．

古典系の相互エントロピーは入力系と出力系の間の同時確率分布を用いて定義されていたが，量子系では，同時確率分布が一般に存在しないことが示されている．そこで，Ohya は，同時確率分布に代わるものとして，入力状態と出力状態 $\Lambda^*\rho$ の間の相関を表す合成状態を

$$\sigma_E = \sum_n \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n$$

のように定めた．Ohya が定めた量子入力系 $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ 量子出力系 $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ において，$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}')$ へのチャネルが線形であるならば，入力状態 ρ のシャッテン分解を

$$\rho = \sum_n \lambda_n E_n$$

と求める．ここで，この分解は $E = \{E_n\}$ の選び方に依存する．

入力状態 ρ と量子チャネル Λ^* に関する量子系の相互エントロピーは，

(1) チャネル Λ^* が恒等変換 id ならば，量子相互エントロピーはフォン・ノイマン エントロピーに一致する．つまり，$I(\rho; id) = S(\rho)$

(2) 系が古典系ならば，量子相互エントロピーは古典系の相互エントロピーに一致する．

(3) 基本不等式 $0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq S(\rho)$ を満たす．

この３つの条件を満たすものとして，量子相互エントロピーを

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sup_E S(\sigma_E, \sigma_0)$$

で定めた[8]．ここで $S(\sigma_E, \sigma_0)$ は，σ_E と σ_0 に関する量子系の梅垣相対エントロピー[12]であり，

$$S(\sigma_E, \sigma_0) \equiv tr\, \sigma_E (\log \sigma_E - \log \sigma_0)$$

で定義されている．また，量子相互エントロピーは，基本不等式

$$0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq \min\{S(\rho), S(\Lambda^* \rho)\}$$

を満たす

2.2 平均相互エントロピーの定式化

ここで,KOW 力学的エントロピーと量子相互エントロピーを用いて,平均相互エントロピーを導入する.まず,入力状態ρを

$$\rho=\sum_j \lambda_j^{(1)} E_j^{(1)}$$

とシャッテン分解する.次に,$\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right)$を

$$\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right)$$
$$=\sum_{j'_1,\cdots,j'_N} tr\,\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\Lambda_2\left(W_{j'_1 j'_1}^{(2)}\left(\Lambda_2\left(W_{j'_2 j'_2}^{(2)}\left(\cdots\Lambda_2\left(W_{j'_N j'_N}^{(2)}(I)\right)\cdots\right)\right)\right)\right)\otimes\left(e_{j'_1 j'_1}\otimes\cdots\otimes e_{j'_N j'_N}\right)$$

と定義する. また,$\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*(\rho)\right)$を

$$\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*(\rho)\right)$$
$$=\sum_{j'_1,\cdots,j'_N} tr\,\Gamma^*(\rho)\Lambda_2\left(W_{j'_1 j'_1}^{(2)}\left(\Lambda_2\left(W_{j'_2 j'_2}^{(2)}\left(\cdots\Lambda_2\left(W_{j'_N j'_N}^{(2)}(I)\right)\cdots\right)\right)\right)\right)\otimes\left(e_{j'_1 j'_1}\otimes\cdots\otimes e_{j'_N j'_N}\right)$$

と定義する.さらに,

$$\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right)\log\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right),\ \Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right)\log\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*(\rho)\right)$$

については,

$$\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right)\log\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right)$$
$$=\sum_{j'_1,\cdots,j'_N}\left(tr\,\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\Lambda_2\left(W_{j'_1 j'_1}^{(2)}\left(\Lambda_2\left(W_{j'_2 j'_2}^{(2)}\left(\cdots\Lambda_2\left(W_{j'_N j'_N}^{(2)}(I)\right)\cdots\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\log\left(tr\,\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\Lambda_2\left(W_{j'_1 j'_1}^{(2)}\left(\Lambda_2\left(W_{j'_2 j'_2}^{(2)}\left(\cdots\Lambda_2\left(W_{j'_N j'_N}^{(2)}(I)\right)\cdots\right)\right)\right)\right)\right)\otimes\left(e_{j'_1 j'_1}\otimes\cdots\otimes e_{j'_N j'_N}\right)$$

$$\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right)\log\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*(\rho)\right)$$
$$=\sum_{j'_1,\cdots,j'_N}\left(tr\,\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\Lambda_2\left(W_{j'_1 j'_1}^{(2)}\left(\Lambda_2\left(W_{j'_2 j'_2}^{(2)}\left(\cdots\Lambda_2\left(W_{j'_N j'_N}^{(2)}(I)\right)\cdots\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\log\left(tr\,\Gamma^*(\rho)\Lambda_2\left(W_{j'_1 j'_1}^{(2)}\left(\Lambda_2\left(W_{j'_2 j'_2}^{(2)}\left(\cdots\Lambda_2\left(W_{j'_N j'_N}^{(2)}(I)\right)\cdots\right)\right)\right)\right)\right)\otimes\left(e_{j'_1 j'_1}\otimes\cdots\otimes e_{j'_N j'_N}\right)$$

となる.ここで,相互エントロピーを

$$I^{(N)}\left(\rho;\Gamma^*,\Lambda_1,\Lambda_2,\gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\},\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$\equiv\sup_E\left\{\sum_j\lambda_j^{(1)}S\left(\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right),\Phi_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}^{(N)}\left(\Gamma^*(\rho)\right)\right)\right\}$$

と定義し,平均相互エントロピーを

$$\tilde{I}\left(\rho;\Gamma^*,\Lambda_1,\Lambda_2,\gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\},\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$\equiv\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}I^{(N)}\left(\rho;\Gamma^*,\Lambda_1,\Lambda_2,\gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\},\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$=\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left\{\sup_E\left\{\sum_j\lambda_j^{(1)}S\left(\Phi^{(N)}_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right),\Phi^{(N)}_{\Lambda_2,\gamma^{(2)}}\left(\Gamma^*(\rho)\right)\right)\right\}\right\}$$

と定義する.ここで,以下のような定理が存在する.

定理　平均相互エントロピーと出力系のエントロピーに対して,

$$0\le\tilde{I}\left(\rho;\Gamma^*,\Lambda_1,\Lambda_2,\gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\},\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$\le\tilde{S}^{KOW}\left(\Gamma^*(\rho);\Lambda_2,\gamma_{j'}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$

が成り立つ.さらに,$\Gamma^*=id$, $\Lambda_1=\Lambda_2=\Lambda$ とすると,

$$\tilde{I}\left(\rho;\Gamma^*,\Lambda,\Lambda,\gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\},\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$=-\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left[\sup_E\left\{\begin{array}{l}\left\{\sum_j\lambda_j^{(1)}S\left(E_j^{(1)};\Lambda,\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)\right\}\\-\left\{S\left(\rho;\Lambda,\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)\right\}\end{array}\right\}\right]$$

となる.ここで,

$$\sum_j\lambda_j^{(1)}S\left(E_j^{(1)};\Lambda,\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$=\sum_j\lambda_j^{(1)}\sum_{j_1',\cdots,j_N'}\left(tr\,E_j^{(1)}\Lambda\left(W^{(2)}_{j_1'j_1'}\left(\Lambda\left(W^{(2)}_{j_2'j_2'}\left(\cdots\Lambda\left(W^{(2)}_{j_N'j_N'}(I)\right)\cdots\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$\log\left(tr\,E_j^{(1)}\Lambda\left(W^{(2)}_{j_1'j_1'}\left(\Lambda\left(W^{(2)}_{j_2'j_2'}\left(\cdots\Lambda\left(W^{(2)}_{j_N'j_N'}(I)\right)\cdots\right)\right)\right)\right)\right)$$
$$=0$$

となるとき,平均相互エントロピーは,入力系のエントロピーに等しくなる.ここで,いくつかの,定理がある.

定理　$\begin{cases}\Gamma^*=id,\ \Lambda_1=\Lambda_2=\Lambda=id,\ E_j^{(1)}=\left|x_j^{(1)}\right\rangle\left\langle x_j^{(1)}\right|\\\gamma_j=E_{jj}=\left|x_j\right\rangle\left\langle x_j\right|,W_{jj}^{(1)}(\bullet)=W_{j'j'}^{(2)}=\gamma_j^*(\bullet)\gamma_j\end{cases}$ のとき,

$$\tilde{I}\left(\rho;\Gamma^*,id,id,\gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\},\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$=\tilde{S}^{KOW}\left(\rho;id,\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$

が成り立つ.

定理　$\begin{cases}\Gamma^*=id,\ \Lambda_1(\bullet)=\Lambda_2(\bullet)=\Lambda(\bullet)=U^*(\bullet)U,\\E_j^{(1)}=\left|x_j^{(1)}\right\rangle\left\langle x_j^{(1)}\right|,\gamma_j=E_j=\left|x_j\right\rangle\left\langle x_j\right|,W_{jj}^{(1)}(\bullet)=W_{j'j'}^{(2)}=\gamma_j^*(\bullet)\gamma_j\end{cases}$ のとき,

$$\tilde{I}\left(\rho ; id, \Lambda, \Lambda, \gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\}, \gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$=\tilde{S}^{KOW}\left(\rho ; \Lambda, \gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$

が成り立つ.ただし,$U\left|x_{j_i'}\right\rangle$は,$\left|x_{j_{i+1}'}\right\rangle$ $(i=1, \cdots, N-1)$に対して,直交または,同一に移すユニタリー作用素である.また,$U\left|x_j^{(1)}\right\rangle$は,$\left|x_{j_1'}\right\rangle$に対して,直交または,同一に移すユニタリー作用素である.さらに,$U\left|x_{j_i'}\right\rangle=\left|x_{m_i}\right\rangle, U\left|x_j^{(1)}\right\rangle=\left|x_l^{(1)}\right\rangle$とおく.

ここで,出力系のエントロピーと定義した平均相互エントロピーの大小関係については,先ほど求めた.つまり,

$$0 \leq \tilde{I}\left(\rho ; \Gamma^*, \Lambda_1, \Lambda_2, \gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\}, \gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$\leq \tilde{S}^{KOW}\left(\Gamma^*(\rho) ; \Lambda_2, \gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$

となる.さらに,入力系のエントロピーと定義した平均相互エントロピーの大小関係を調べる.ここで,以下のような定理が存在する.

定理　平均相互エントロピーと入力系のエントロピーに対して,

$$0 \leq \tilde{I}\left(\rho ; \Gamma^*, \Lambda_1, \Lambda_2, \gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\}, \gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$\leq \tilde{S}^{KOW}\left(\rho ; \Lambda_2, \gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\}\right)$$

が成り立つ.

2.3 平均相互エントロピーの計算について

定理　$\Gamma^*, \Lambda_1, \Lambda_2$をそれぞれ透過率$\eta, \eta_1, \eta_2$の減衰チャネルとし,入力状態を$\rho=\lambda_1^{(1)}|0\rangle\langle 0|+\left(1-\lambda_1^{(1)}\right)|\theta\rangle\langle\theta|$,そのシャッテン分解を$\rho=\|\rho\|\left|x_1^{(1)}\right\rangle\left\langle x_1^{(1)}\right|+(1-\|\rho\|)\left|x_2^{(1)}\right\rangle\left\langle x_2^{(1)}\right|$とする.さらに,

$$\gamma^{(1)}=\left\{\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(1)}\right\}, \gamma_j^{(1)}=\left|x_j^{(1)}\right\rangle\left\langle x_j^{(1)}\right|$$
$$\gamma^{(2)}=\left\{\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)}\right\}, \gamma_{j'}^{(2)}=\left|x_{j'}^{(2)}\right\rangle\left\langle x_{j'}^{(2)}\right|$$

とする.このとき,

$$\sum_j p_{k,j}^{(2)} p_j^{(2)}=p_k^{(2)}, \sum_{j'} p_{k,j'}^{(2)} q_{j',j}^{(2),(1)+}=q_{k,j}^{(2),(1)+}$$

を満たすならば,

$$\tilde{I}\left(\rho ; \Gamma^*, \Lambda_1, \Lambda_2, \gamma^{(1)}=\left\{\gamma_j^{(1)}\right\}, \gamma^{(2)}=\left\{\gamma_{j'}^{(2)}\right\}\right)$$
$$=-\sum_{k,j'} p_{k,j'}^{(2)} p_{j'}^{(2)} \log p_{k,j'}^{(2)}+\sum_j \lambda_j^{(1)} \sum_{k,j'} p_{k,j'}^{(2)} q_{j',j}^{(2),(1)+} \log p_{k,j'}^{(2)}$$

が成り立つ.ただし,

$$W_{jj}^{(1)^*}(\bullet)=\gamma_j^{(1)*}(\bullet)\gamma_j^{(1)},\ W_{j'j'}^{(2)^*}(\bullet)=\gamma_{j'}^{(2)*}(\bullet)\gamma_{j'}^{(2)}$$

$$p_{j'}^{(2)}=tr\left(W_{j_1'j_1'}^{(2)^*}\left(\Lambda_2\left(\Gamma^*(\rho)\right)\right)\right),\ p_{k,j'}^{(2)}=tr\left(W_{kk}^{(2)^*}\left(\Lambda_2^*\left(\left|x_k^{(2)}\right\rangle\left\langle x_k^{(2)}\right|\right)\right)\right)$$

$$q_{j',j}^{(2),(1)+}=tr\left(W_{j'j'}^{(2)^*}\left(\Lambda_2^*\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right)\right)\right)$$

であり,さらに,

$$\left|x_j^{(1)}\right\rangle=a_j^{(1)}|0\rangle+b_j^{(1)}|\theta\rangle$$

$$\left|a_j^{(1)}\right|^2=\frac{\tau_j^{(1)^2}}{\tau_j^{(1)^2}+2\exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)}+1}$$

$$\left|b_j^{(1)}\right|^2=\frac{1}{\tau_j^{(1)^2}+2\exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)}+1}$$

$$a_j^{(1)}\overline{b}_j^{(1)}=\overline{a}_j^{(1)}b_j^{(1)}=\frac{\tau_j^{(1)^2}}{\tau_j^{(1)^2}+2\exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)}+1}$$

$$\tau_j^{(1)}=\frac{-(1-2\lambda)-(-1)^j\sqrt{1-4\lambda(1-\lambda)\left(1-\exp\left(-|\theta|^2\right)\right)}}{2(1-\lambda)\exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)}$$

$$\varepsilon_j^{(1)+}=\sqrt{\frac{\tau_j^{(1)^2}+2\exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)}+1}{\tau_j^{(1)^2}+2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)}+1}}$$

$$\varepsilon_j^{(1)-}=\sqrt{\frac{\tau_j^{(1)^2}+2\exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)}+1}{\tau_j^{(1)^2}-2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)}+1}}$$

$$\mu_j^{(1)+} = \frac{1}{2}\left[1+\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-\eta_2\eta)|\theta|^2\right\}\right]\frac{1}{\left(\varsigma_j^{(1)+}\right)^2}$$

$$\mu_j^{(1)-} = \frac{1}{2}\left[1-\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-\eta_2\eta)|\theta|^2\right\}\right]\frac{1}{\left(\varsigma_j^{(1)-}\right)^2}$$

$$\left|y_j^{(1)+}\right\rangle = \varsigma_j^{(1)+}\left[a_j^{(1)}|0\rangle + b_j^{(1)}\left|\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right\rangle\right] = \varsigma_j^{(1)+}a_j^{(1)}|0\rangle + \varsigma_j^{(1)+}b_j^{(1)}\left|\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right\rangle$$

$$\left\langle y_j^{(1)+}\right| = \varsigma_j^{(1)+}\left[\overline{a}_j^{(1)}\langle 0| + \overline{b}_j^{(1)}\left\langle\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right|\right] = \varsigma_j^{(1)+}\overline{a}_j^{(1)}\langle 0| + \varsigma_j^{(1)+}\overline{b}_j^{(1)}\left\langle\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right|$$

$$\left|y_j^{(1)-}\right\rangle = \varsigma_j^{(1)-}\left[a_j^{(1)}|0\rangle - b_j^{(1)}\left|\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right\rangle\right] = \varsigma_j^{(1)-}a_j^{(1)}|0\rangle - \varsigma_j^{(1)-}b_j^{(1)}\left|\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right\rangle$$

$$\left\langle y_j^{(1)-}\right| = \varsigma_j^{(1)-}\left[\overline{a}_j^{(1)}\langle 0| - \overline{b}_j^{(1)}\left\langle\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right|\right] = \varsigma_j^{(1)-}\overline{a}_j^{(1)}\langle 0| - \varsigma_j^{(1)-}\overline{b}_j^{(1)}\left\langle\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right|$$

$$\nu_j^{(1)+} = \frac{1}{2}\left(1+\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-\eta)|\theta|^2\right\}\right)\frac{1}{\left(\varepsilon_j^{(1)+}\right)^2}$$

$$\nu_j^{(1)-} = \frac{1}{2}\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-\eta)|\theta|^2\right\}\right)\frac{1}{\left(\varepsilon_j^{(1)-}\right)^2}$$

$$a_j^{(1)+} = \varepsilon_j^{(1)+}a_j^{(1)}, \; a_j^{(1)-} = \varepsilon_j^{(1)-}a_j^{(1)}$$

$$b_{j'}^{(2)+} = \varepsilon_j^{(1)+}b_j^{(1)}, \; b_j^{(1)-} = \varepsilon_j^{(1)-}b_j^{(1)}$$

$$\left|x_j^{(1)+}\right\rangle = \varepsilon_j^{(1)+}a_j^{(1)}|0\rangle + \varepsilon_j^{(1)+}b_j^{(1)}\left|\sqrt{\eta}\theta\right\rangle = a_j^{(1)+}|0\rangle + b_j^{(1)+}\left|\sqrt{\eta}\theta\right\rangle$$

$$\left\langle x_j^{(1)+}\right| = \varepsilon_j^{(1)+}\overline{a}_j^{(1)}\langle 0| + \varepsilon_j^{(1)+}\overline{b}_j^{(1)}\left\langle\sqrt{\eta}\theta\right| = \overline{a}_j^{(1)+}\langle 0| + \overline{b}_j^{(1)+}\left\langle\sqrt{\eta}\theta\right|$$

$$\left|x_j^{(1)-}\right\rangle = \varepsilon_j^{(1)-}a_j^{(1)}|0\rangle - \varepsilon_j^{(1)-}b_j^{(1)}\left|\sqrt{\eta}\theta\right\rangle = a_j^{(1)-}|0\rangle - b_j^{(1)-}\left|\sqrt{\eta}\theta\right\rangle$$

$$\left\langle x_j^{(1)-}\right| = \varepsilon_j^{(1)-}\overline{a}_j^{(1)}\langle 0| - \varepsilon_j^{(1)-}\overline{b}_j^{(1)}\left\langle\sqrt{\eta}\theta\right| = \overline{a}_j^{(1)-}\langle 0| - \overline{b}_j^{(1)-}\left\langle\sqrt{\eta}\theta\right|$$

$$\varsigma_j^{(1)+} = \sqrt{\frac{\tau_j^{(1)^2} + 2\exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)} + 1}{\tau_j^{(1)^2} + 2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta_2\eta|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)} + 1}}$$

$$\varsigma_j^{(1)-} = \sqrt{\frac{\tau_j^{(1)^2} + 2\exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)} + 1}{\tau_j^{(1)^2} - 2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta_2\eta|\theta|^2\right)\tau_j^{(1)} + 1}}$$

$$\Gamma^*(\rho) = \lambda_1^{(1)}|0\rangle\langle 0| + \left(1-\lambda_1^{(1)}\right)\left|\sqrt{\eta}\theta\right\rangle\left\langle\sqrt{\eta}\theta\right|$$

$$\Lambda_2^*\left(\Gamma^*(\rho)\right) = \lambda_1^{(1)}|0\rangle\langle 0| + \left(1-\lambda_1^{(1)}\right)\left|\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right\rangle\left\langle\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right|$$

$$\Lambda_2^*\left(\left|x_{j'}^{(2)}\right\rangle\left\langle x_{j'}^{(2)}\right|\right) = \nu_{j'}^{(2)+}\left|x_{j'}^{(2)+}\right\rangle\left\langle x_{j'}^{(2)+}\right| + \left(1-\nu_{j'}^{(2)+}\right)\left|x_{j'}^{(2)-}\right\rangle\left\langle x_{j'}^{(2)-}\right|$$

$$\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right) = \nu_j^{(1)+}\left|x_j^{(1)+}\right\rangle\left\langle x_j^{(1)+}\right| + \left(1-\nu_j^{(1)+}\right)\left|x_j^{(1)-}\right\rangle\left\langle x_j^{(1)-}\right|$$

$$\Lambda_2^*\left(\Gamma^*\left(E_j^{(1)}\right)\right) = \mu_j^{(1)+}\left|y_j^{(1)+}\right\rangle\left\langle y_j^{(1)+}\right| + \left(1-\mu_j^{(1)+}\right)\left|y_j^{(1)-}\right\rangle\left\langle y_j^{(1)-}\right|$$

$$\left|x_j^{(2)}\right\rangle = a_j^{(2)}|0\rangle + b_j^{(2)}\left|\sqrt{\eta}\theta\right\rangle$$

$$\left|a_j^{(2)}\right|^2 = \frac{\tau_j^{(2)^2}}{\tau_j^{(2)^2} + 2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta|\theta|^2\right)\tau_j^{(2)} + 1}$$

$$\left|b_j^{(2)}\right|^2 = \frac{1}{\tau_j^{(2)^2} + 2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta|\theta|^2\right)\tau_j^{(2)} + 1}$$

$$a_j^{(2)}\overline{b}_j^{(2)} = \overline{a}_j^{(2)}b_j^{(2)} = \frac{\tau_j^{(2)^2}}{\tau_j^{(2)^2} + 2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta|\theta|^2\right)\tau_j^{(2)} + 1}$$

$$\tau_j^{(2)} = \frac{-(1-2\lambda) - (-1)^j\sqrt{1-4\lambda(1-\lambda)\left(1-\exp\left(-|\theta|^2\right)\right)}}{2(1-\lambda)\exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right)}$$

$$\varepsilon_{j'}^{(2)+} = \sqrt{\frac{\tau_{j'}^{(2)^2} + 2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta|\theta|^2\right)\tau_{j'}^{(2)} + 1}{\tau_{j'}^{(2)^2} + 2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta_2\eta|\theta|^2\right)\tau_{j'}^{(2)} + 1}}$$

$$\varepsilon_{j'}^{(2)-} = \sqrt{\frac{\tau_{j'}^{(2)^2} + 2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta|\theta|^2\right)\tau_{j'}^{(2)} + 1}{\tau_{j'}^{(2)^2} - 2\exp\left(-\frac{1}{2}\eta_2\eta|\theta|^2\right)\tau_{j'}^{(2)} + 1}}$$

$$\nu_{j'}^{(2)+} = \frac{1}{2}\left(1+\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-\eta_2)\eta|\theta|^2\right\}\right)\frac{1}{\left(\varepsilon_{j'}^{(2)+}\right)^2}$$

$$\nu_{j'}^{(2)-} = \frac{1}{2}\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{2}(1-\eta_2)\eta|\theta|^2\right\}\right)\frac{1}{\left(\varepsilon_{j'}^{(2)-}\right)^2}$$

$$a_{j'}^{(2)+} = \varepsilon_{j'}^{(2)+}a_{j'}^{(2)},\ a_{j'}^{(2)-} = \varepsilon_{j'}^{(2)-}a_{j'}^{(2)}$$

$$b_{j'}^{(2)+} = \varepsilon_{j'}^{(2)+}b_{j'}^{(2)},\ b_{j'}^{(2)-} = \varepsilon_{j'}^{(2)-}b_{j'}^{(2)}$$

$$\left|x_{j'}^{(2)+}\right\rangle = \varepsilon_{j'}^{(2)+}a_{j'}^{(2)}|0\rangle + \varepsilon_{j'}^{(2)+}b_{j'}^{(2)}\left|\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right\rangle = a_{j'}^{(2)+}|0\rangle + b_{j'}^{(2)+}\left|\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right\rangle$$

$$\left\langle x_{j'}^{(2)+}\right| = \varepsilon_{j'}^{(2)+}\overline{a}_{j'}^{(2)}\langle 0| + \varepsilon_{j'}^{(2)+}\overline{b}_{j'}^{(2)}\left\langle\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right| = \overline{a}_{j'}^{(2)+}\langle 0| + \overline{b}_{j'}^{(2)+}\left\langle\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right|$$

$$\left|x_{j'}^{(2)-}\right\rangle = \varepsilon_{j'}^{(2)-}a_{j'}^{(2)}|0\rangle - \varepsilon_{j'}^{(2)-}b_{j'}^{(2)}\left|\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right\rangle = a_{j'}^{(2)-}|0\rangle - b_{j'}^{(2)-}\left|\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right\rangle$$

$$\left\langle x_{j'}^{(2)-}\right| = \varepsilon_{j'}^{(2)-}\overline{a}_{j'}^{(2)}\langle 0| - \varepsilon_{j'}^{(2)-}\overline{b}_{j'}^{(2)}\left\langle\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right| = \overline{a}_{j'}^{(2)-}\langle 0| - \overline{b}_{j'}^{(2)-}\left\langle\sqrt{\eta_2\eta}\theta\right|$$

である.

3　考察と今後の課題

入出力系の時間発展を考慮した量子通信過程において情報伝送の力学的変化を厳密に量子チャネルを通して,入力系から出力系に平均してどのくらいの情報が正しく伝送されるのかということを調べるため KOW 力学的エントロピーと Ohya によって導入された量子相互エントロピーを基にして平均相互エントロピーを新たに定式化した.さらに,そのエントロピーについて相互エントロピー型として満たすべき条件を調べた.また,コヒーレント入力状態と減衰チャネルを入出力系の時間発展及び入出力間の量子チャネルとして考慮した場合の平均相互エントロピーを定理の形で求めた.この定理は,入出力系の状態変化を減衰チャネルで与え,入出力間の量子チャネルを同様に減衰チャネルで与えたときに,入力系から出力系に平均してどのくらいの情報が正しく伝達されるのかを示している.

今後の課題としては,本論文で定式化した平均相互エントロピーを基にして量子情報理論の中の大きなテーマである通信路符号化定理の厳密な証明を行っていきたいと考えている.

参考文献

[1] L.Accardi, M.Ohya and N.Watanabe, Dynamical entropy through quantum Markov chains, Open System Infor. Dynamics 4 (1997) 71-87.

[2] L.Accardi, M.Ohya and N.Watanabe, Note on quantum dynamical entropies, Rep. Math. Phys. 38, No.3, 457-469, 1996.

[3] R.Alicki and M.Fannes, Defining quantum dynamical entropy, Lett. Math. Phys. 32 (1994) 75-82.

[4] A.Connes, H.Narnhoffer and W.Thirring: "Dynamical entropy of C^* algebras and von Neumann algebras", Acta Mathematica, 134, 289-306, 1975.

[5] A.Connes and E.Störmer, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras, Acta Math. 134 (1975) 289-306.

[6] G.G.Emch, Positivity of the K-entropy on non-Abelian K-flows,Z.Wahrscheinlichkeistheory Gebiete 29, 241, 1974.
[7] A.Kossakowski, M.Ohya and N.Watanabe, Quantum Dynamical Entropy for Completely Positive Map (1998).
[8] M.Ohya,On compound state and mutual information in quantum information theory, IEEE Trans. Information Theory 29 (1983) 770-774.
[9] M.Ohya, State change, complexity and fractal in quantum systems, Quantum Communications and Measurement, 2, 309-320, 1995.
[10] M.Ohya and D.Petz, Quantum Entropy and its Use (Springer,1993).
[11] 大矢雅則, 梅垣壽春, 量子論的エントロピー, (1984), 共立出版
[12] H.Umegaki: "Conditional expectations in an operator algebra, IV", (entropy and information), Kodai Mathematical Seminar Reports, 14, 59-85, 1962.